Побудова траєкторії руху в диференціальній грі переслідування

Барановська Л.В.1[0000-0003-0024-8180], Довжаниця К.Г.2[0000-0001-8529-1553],

Барановська Г.Г. 3[0000-0002-6878-6973]

1, 2, 3 КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
lesia@baranovsky.org

Анотація. У даній роботі розглянуто диференціальну гру переслідування. За допомогою методу розв'язуючих функцій А.О. Чикрія знайдено достатні умови для закінчення гри і одержано рівняння для чисельного знаходження розв'язуючої функції. Сформульовано достатні умови для закінчення гри. Для контрольного прикладу Л.С. Понтрягіна реалізовано візуалізацію траєкторії рухів переслідувача і втікача на площині. Для цього був створений програмний продукт на мові програмування Python. Даний програмний продукт є прототипом системи моделювання «переслідувачі-втікач», яку можна буде застосовувати для вибору керування в задачах переслідування. У роботі було розглянуто конкретний приклад. Дана задача було розв'язана аналітично за допомогою методу розв'язуючих функцій, побудовано керування переслідувача та знайдено розрахунковий час закінчення гри. Програмний продукт було протестовано на контрольному прикладі. Результат показав співпадіння розрахункового часу та фактичного часу закінчення гри.

Ключові слова: конфліктно-керовані процеси, диференціальні ігри, ігри переслідування.

1 Вступ

У наш час теорія конфліктно-керованих процесів відносять до математичних та комп'ютерних наук, що розвиваються досить активно. Основним об'єктом дослідження є задачі керування динамічними процесами в умовах конфлікту, який передбачає наявність двох або більше сторін, здатних діяти на процес з протилежними або неспівпадаючими цілями, а також оптимізація функціональних властивостей процесу. Динамічні процеси можуть описуватися диференційними, інтегральними, різницевих, гібридних та іншими рівняннями. Конфліктно-керовані процеси, що описуються диференційними рівняннями, називають диференційними іграми. Цей термін було введено Р. Айзеком – одним з засновників теорії диференційних ігор [1].

Найбільш простим та досить ефективним для розв'язку конкретни задач переслідування є перший метод Л.С. Понтрягіна. Перший метод Л.С. Понтрягіна тісно пов'язаний з методом розв'язуючих функцій А.О. Чикрія [2], який і буде застосовано у даній роботі. В рамках цього методу достатні умови розв'язності задачі переслідування в класі контрстратегій можна зручно перевірити. Метод розв'язуючих функцій розроблено і для диференціально-різницевих ігор в роботах [3–10]. Ігрові проблеми зближення при відмові керуючих пристроїв розглянуто у роботах [11, 12]. Для нестаціонарних процесів метод розв'язуючих функцій представлений у роботах [13–16].

2 Контрольний приклад Л.С. Понтрягіна

Рух переслідувача і втікача задається системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} = 2u, & x \in R, & \left\|u\right\| \le 1, & \alpha, \rho > 0, \\ \ddot{y} + 2\dot{y} = v, & y \in R, & \left\|v\right\| \le 1, & \beta, \sigma > 0\,. \end{cases}$$

Нехай $\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \rho = 2,\ \sigma = 1,\ \begin{cases} x(0) = 6,\ \dot{x}(0) = 1, \\ y(0) = 2,\ \dot{y}(0) = 1. \end{cases}$

Переслідування вважається завершеним, якщо $x = y$. Перейдемо до системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{z_1} = z_2 - z_3, \\ \dot{z_2} = -z_2 + 2u, \\ \dot{z_3} = -\dot{2}z_3 + v. \end{cases}$$

Термінальна множина $M^{\cdot} = \{z\colon z_1 = 0\}$, при чому, $M^{\circ} = \{z\colon z_1 = 0\}$, $M = \{z\colon z_1 = z_2 = z_3 = 0\}$. Тоді $L = \{z\colon z_2 = z_3 = 0\} = \{R, 0, 0\}$. Оператор ортогонального перетворення $\pi\colon R^s \to L$ задається матрицею $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Матриця A системи $\dot{z} = Az + u - v$ та області управління:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2u \\ 0 \end{pmatrix} : \left\|u\right\| \le 1 \right\}, V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} : \left\|v\right\| \le 1 \right\}.$$

Фундаментальна матриця відповідної однорідної системи буде мати вигляд:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-e^{-t}}{1} & -\frac{1-e^{-2t}}{2} \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Покладемо $\gamma(t) \equiv 0,\ z(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тоді $\xi(t, z, 0) = 4 + \frac{1-e^{-t}}{1} 1 - \frac{1-e^{-2t}}{2} 1$.

Розв'язуюча функція $\alpha(t,\tau,z,v,0)$ буде більшим додатним коренем квадратного рівняння

$$\left\|\frac{1-e^{-2(t-\tau)}}{2}v-\alpha\xi(t,z(0),0)\right\|=\frac{1-e^{-(t-\tau)}}{1}2$$

відносно α. Далі знайдемо час затримання втікача $T(z(0),0)$ як $\min\{t\geq 0: \int_0^t \frac{w(t-\tau)}{||\xi(t,z,0)||}d\tau\}$, звідки одержуємо t=5. Будуємо керування переслідувача:

$$u=v(\tau)-\frac{\alpha(T,\tau,z^{\circ},v(\tau),0)[\,\xi(T,z^{\circ},0)]}{\pi e^{A(T-\tau)}}, \tag{1}$$

$$T=5, \qquad u1=v(\tau)-\frac{\alpha(5,\tau,z^{\circ},v(\tau),0)[\,\xi(5,z^{\circ},0)]}{\pi e^{A(5-\tau)}}, \qquad u=lex\min u1.$$

3 Візуалізація гри на площині

Для представлення траєкторій рухів переслідувача та втікача у грі, описаній у контрольному прикладі Л.С. Понтрягіна та для випадку площини, був створений програмний продукт на мові програмування Python. Для програми вхідними даними є наступні відомості: значення параметрів α,β,σ,ρ; початкові координати всіх учасників.

Нехай $\alpha=1,\ \beta=2,\ \rho=2,\ \sigma=1, \begin{cases} x(0)=6,\ \dot{x}(0)=1, \\ y(0)=2,\ \dot{y}(0)=1. \end{cases}$

Ввівши дані у програму одержали графічний результат (Рис. 1) руху втікача та переслідувача, підтвердили співпадіння фактичного часу закінчення гри з розрахунковим (T=5).

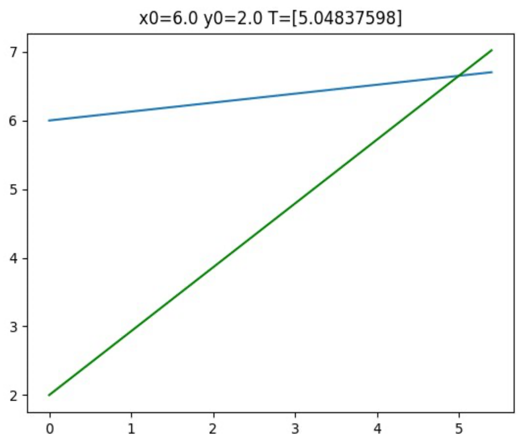

Рис. 1. Побудова графіків руху втікача та переслідувача

Алгоритм, за яким працює програмний продукт:

1. Перевіряємо умови $\rho \geq \sigma, \frac{\rho}{\alpha} \geq \frac{\sigma}{\beta}$.
2. Знаходимо фундаментальну матрицю e^{At}.
3. Перевіряємо умову $W(t) \neq \emptyset$, та знаходимо $w(t)$.
4. Знаходимо $\xi(t, z, 0) = z_1 + \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} z_2 - \frac{1-e^{-\beta t}}{\beta} z_3$.
5. Знаходимо час затримки втікача як $\min \{t \geq 0 : \int_0^t \frac{w(t-\tau)}{||\xi(t,z,0)||} d\tau\}$.
6. Будуємо керування переслідувача у вигляді (1).
7. За допомогою метода Рунге-Кутти будуємо розв'язки диференціальних рівнянь в момент часу t.

Література

1. Айзекс, Р.: Дифференциальные игры. Москва, Мир (1967).
2. Chikrii, A.: Conflict-Controlled Processes. Springer Science &Business Media (2013).
3. Baranovska, L.V.: Quasi-Linear Differential-Difference Game of Approach. In: Sadovnichiy, V., Zgurovsky, M. (eds.) Modern Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems, pp. 505–524. Springer, Cham (2019).
4. Baranovska, L.V.: On Quasilinear Differential-Difference Games of Approach. Journal of Automation and Information Sciences 49(8), 53–67 (2017).
5. Baranovska, Lesia V.: Pursuit differential-difference games with pure time-lag. Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B 24(3), 1024–1031 (2019).
6. Baranovskaya, G.G., Baranovskaya, L.V.: Group Pursuit in Quasilinear Differential-Difference Games. Journal of Automation and Information Sciences 29(1), 55–62 (1997).
7. Барановская, Л.В., Барановская, Г.Г.: О дифференциально-разностной игре группового преследования. Доповіді Національної академії наук України (3), 12–15 (1997).
8. Baranovskaya, L.V.: A method of resolving functions for one class of pursuit problems. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, vol.2, 4(74), 4–8 (2015).
9. Baranovska, L.V.: Method of resolving functions for the differential-difference pursuit game for different-inertia objects. In: Sadovnichiy, V., Zgurovsky, M. (eds.) Advances in Dynamical Systems and Control, vol.69, pp. 159–176 (2016).
10. Baranovska, L.V.: Group Pursuit Differential Games with Pure Time-Lag. In: Sadovnichiy, V., Zgurovsky, M. (eds.) Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems, pp. 475–488. Springer, Cham (2021).
11. Chikrij, A.A., Baranovskaya, L.V., Chikrij, Al.A.: The game problem of approach under the condition of failure of controlling devices. Problemy Upravleniya I Informatiki (Avtomatika) (4), 5–13 (1997).
12. Baranovskaya, L.V., Chikrii, Al.A.: Game Problems for a Class of Hereditary Systems. Journal of Automation and Information Sciences 29(2-3), pp. 87–97 (1997).
13. Baranovskaya, L.V., Chikrij, A.A., Chikrij, Al.A.: Inverse Minkowski functionals in a nonstationary problem of group. Izvestiya Akademii Nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya (1), 109–114 (1997).
14. Baranovskaya, L.V., Chikrij, A.A., Chikrij, Al.A.: Inverse Minkowski functionals in a nonstationary problem of group. Journal of Computer and Systems Sciences International 36(1), 101–106 (1997).

15. Pepelyaev, V.A., Chikrii, Al.A.: On the game dynamics problems for nonstationary controlled processes. Journal of Automation and Information Sciences 49(3), 13–23 (2017).
16. Chikrii, Al.A.: On nonstationary game problem of motion control. Journal of Automation and Information Sciences 47(11), 74–83 (2015).